§ 8. Независимость S^1

Независимость ряда аксиомных схем устанавливается посредством истинностных таблиц с двумя значениями истинности 1 и 0 (отмеченное значение 1):

1) для $A1$ принимается $\sim x = 0$ и $x^1 : \ldots : x^n = x^1 \cdot \ldots \ldots \cdot x^n$.

2) для $A2$ принимается $\sim x = 1$ и $x^1 : \ldots : x^n = x^1 \bigvee \ldots \ldots \bigvee x^n$, где $\bigvee$ есть соединительная дизъюнкция ($x^1 \bigvee \ldots \bigvee x^n = 0$, если и только если все $x^1, \ldots, x^n$ имеют значение 0);

3) для $A3$ принимается $\sim x = x$, $xy = 1$, $x^1 : \ldots : x^n = 1$

4) для $A4$ принимается $\sim x = x$, $xy = x$, $x^1 : \ldots : x^n = x^1$

5) для $A7$ принимается $\sim x = x$, $x^1 : \ldots : x^n = 0$

6) для $A9$ принимается $\sim x = x$, $x^1 : \ldots : x^n = x^1 \bigvee \ldots \bigvee x^n$

7) для $A10$ принимается $x^1 : \ldots : x^n = x^1 \bigvee \ldots \bigvee x^n$

8) для $A11$ принимается $x = \sim x$, $x^1 : x^2 = 0$, $x^1 : \ldots : x^n = 1$, если все $x^i = 1$, и $x^1 : \ldots : x^n = 0$ в остальных случаях ($n > 2$); рассматривается частный случай

$$a^1 : a^2 : \ldots : a^n \vdash (a^1 : a^2 : \ldots : a^{n-1}) : a$$

Для доказательства независимости $A5$ и $A6$ можно воспользоваться трехзначными таблицами с 0 в качестве единственного отмеченного значения. Следующие таблицы являются общими для $A5$ и $A6$: 1) $\sim x = 1$, если $x = 1$; $\sim x = 2$, если $x = 0$; $\sim x = 0$, если $x = 2$; 2) $xy = 0$, если и только если $x = 0$ и $y = 0$; в остальных случаях $xy = 1$; 3) $x^1 : \ldots : x^n = 1$ ($n \geqslant 2$); 4) $(x \vdash y) = 2$, если $x = 0$ и $y = 1$ или $y = 2$; $(x \vdash y) = 0$ в остальных случаях. Затем:

9) для $A5$ принимается $x^1 \cdot \ldots \cdot x^n = 0$ ($n > 2$)

10) для $A6$ принимается $x^1 \cdot \ldots \cdot x^n = 1$ ($n > 2$).

Независимость $A8$ и $A13$ устанавливается посредством трехзначных таблиц с отмеченными значениями 0 и 1.

Общие для них таблицы : 1) $\sim x = 1$, если $x = 1$; $\sim x = 2$, если $x = 0$; $\sim x = 0$, если $x = 2$; 2) $(x \vdash y) = 2$, если $x = 0$ или $x = 1$, а $y = 2$; $(x \vdash y) = 0$ в остальных случаях. Затем:

11) для $A8$ принимается $xy = 2$, если и только если $y = 2$ (или то и другое); $xy = 0$ в остальных случаях; $x^1 : \ldots : x^n = 0$ $(n \geqslant 2)$, если одно и только одно x^i равно 0, а все остальные x^i равны 2; $x^1 : \ldots : x^n = 2$, если все x^i равны 2; $x^1 : \ldots : x^n = 1$ в остальных случаях;

12) для $A13$ принимается $xy = 2$, если и только если $x = 2$ или $y = 2$ (или то и другое); в остальных случаях $xy = 1$; $x^1 : \ldots : x^n = 1$.

Независимость $A12$ и $A14$ доказывается посредством четырехзначных таблиц с единственным отмеченным значением 0. Для $A12$ берется частный случай $y^1 : (y^2 : \ldots : y^m) \vdash y^1 : y^2 \ldots : y^m$, и независимость его доказывается при условии, что $A11$ имеет вид $x^1 : \ldots : x^n \vdash x$, где x отличается от $x^1 : \ldots : x^n$ расстановкой скобок, за исключением случая, когда в скобки берется и x^n. Такой формулировки $A11$ достаточно для доказательства $T8I2$, с помощью которой легко получить исключенный случай.

Общие для $A12$ и $A14$ таблицы: 1) $\sim x = x$, если $x = 1$ или $x = 2$; $\sim x = 3$; если $x = 0$; $\sim x = 0$, если $x = 3$; 2) $xy = 0$, если и только если $x = 0$ и $y = 0$; в остальных случаях $xy = 1$; 3) $(x \vdash y) = 2$, если и только если $x = 0$, а $y = 1$, $y = 2$ или $y = 3$; $(x \vdash y) = 0$ в остальных случаях. Затем:

13) для $A12$ принимается $x^1 : \ldots : x^n = 0$, если $x^n = 2$; $x^1 : \ldots : x^n = 2$ в остальных случаях;

14) для $A14$ принимается $x^1 : \ldots x^n = 1$, если хотя бы одна x^i равна 1; $x^1 : \ldots : x^n = 0$ в остальных случаях;

Для доказательства независимости правил $R1$ и $R2$ достаточно двухзначных таблиц. Таблицы для $R1$: $\sim x = 0$; $xy = 0$; $x^1 : \ldots : x^n = 0$; $(x \vdash y) = 0$, если и только если $x = 1$ и $y = 1$. При этом $a \vdash a$ не будет тавтологией. Таблицы для $R2$: $\sim x = x$; $xy = 0$; $x^1 : \ldots : x^n = 0$;

$(x \vdash y) = 0$, если и только если $x = 1$ и $y = 0$. При этом $a \vdash aa$ не является тавтологией.

Для доказательства независимости $R3$ воспользуемся трехзначными таблицами с отмеченным значением 0: 1) $\sim x = 1$, если $x = 1$; $\sim x = 2$, если $x = 0$; $\sim x = 0$, если $x = 2$; 2) $xy = 0$, если и только если $x = 0$ и $y = 0$; $xy = 1$ в остальных случаях; 3) $x^1 : \ldots : x^n = 1$; 4) $(x \vdash y) = 2$, если и только если $x = 0$, а $y = 1$ или $y = 2$; $(x \vdash y) = 0$ в остальных случаях. При этом $a \vdash a : \sim aa$ не является тавтологией.

§ 9. Правило подстановки

*МТ*1. Если $x \vdash y$ доказуема в S^1, то $z \vdash v$, получающаяся из $x \vdash y$ путем подстановки высказывания a на место элементарного высказывания b везде, где b входит в $x \vdash y$, доказуема в S^1.

Теорему *МТ*1 можно использовать как производное правило вывода (правило подстановки в элементарное высказывание, аналогичное правилу подстановки в пропозициональную переменную).